Ένα νέο σύστημα συν/νων.

Ορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των μοναδιαίων $\hat{T}$ και $\hat{N}$ ώστε $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$.
Τα διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ ορίζουν ένα σύστημα κινούμενων συν/νων και αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Ιδιότητες

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{T} \times \hat{N}) = \frac{d\hat{T}}{ds} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$= \hat{0} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} = \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds},$$ δηλαδή το διάνυσμα

$\frac{d\hat{B}}{ds}$ είναι προφανώς κάθετο στα διανύσματα $\hat{T}, \frac{d\hat{N}}{ds}$

Το διάνυσμα $\frac{d\hat{B}}{ds}$ είναι κάθετο στο $\hat{B}$, κι άρα

$\frac{d\hat{B}}{ds} \parallel \hat{N}$, δηλαδή $\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Το πρόσημο $(-)$ είναι θέμα σύμβασης και η ποσότητα τ αντιστοιχεί στη στρέψη.

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{N}$$

Παραδείγματα: Να βρεθούν η στρέψη και η καμπυλότητα της έλικας: $\bar{r}(t) = (\alpha\cos t)\hat{i} + (\alpha\sin t)\hat{j} + (bt)\hat{k}$, $\alpha, b \geq 0$, $\alpha^2 + b^2 \neq 0$.

$$\bar{v}(t) = (-\alpha\sin t)\hat{i} + (\alpha\cos t)\hat{j} + b\hat{k}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

$$\hat{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}[(-\alpha\sin t)\hat{i} + (\alpha\cos t)\hat{j} + b\hat{k}]$$

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\left[(-\alpha\cos t)\hat{i} + (-\alpha\sin t)\hat{j}\right]}{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}}$$

$$= (-\cos t)\,\hat{i} + (-\sin t)\,\hat{j}$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-\alpha\sin t}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} & \frac{\alpha\cos t}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{b\sin t}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right), - \hat{j}\left(\frac{b\cos t}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right) + \hat{k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right)$$

Στο νέο σύστημα συν/νων οφείλω να περιγράψω τα φυσικά μεγέθη βάση των μοναδιαίων $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$

Ταχύτητα: $\hat{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \sim \bar{v} = |\bar{v}|\,\hat{T}$

Επιτάχυνση:

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\bar{v}|\,\hat{T}\right) = \frac{d|\bar{v}|}{dt}\hat{T} + |\bar{v}|\frac{d\hat{T}}{dt}$$

Όμως $\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|} \frown \frac{d\hat{T}}{dt} = N\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$ και $|\bar{v}| = \frac{ds}{dt}$

Τελικά:

$$\bar{\alpha} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + |\bar{v}|\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|\hat{N}$$

Στο νέο σύστημα συν/νων η ταχύτητα ορίζει τη φορά της κίνησης και είναι εφαπτόμενη στην τροχιά, ενώ η επιτάχυνση έχει δυο συνιστώσες, την επιτρόχιο:

$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$, και την κεντρομόλο $a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$$\bar{v} \times \bar{a} = \bar{v} \times \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{N} \right)$$

$$= \frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2} \hat{T} \times \hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \hat{T} \times \hat{N} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \hat{B}$$

$$\Rightarrow |\bar{v} \times \bar{a}| = k|\bar{v}|^3 \Rightarrow k = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{|\bar{v}|^3}$$

Αντίστοιχα, μπορώ νδο $\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\bar{v} \times \bar{a}|^2}$

Συνολικά:

Για το διάνυσμα θέσης $\bar{r} = \bar{r}(t)$, με $S = |\bar{r}|$

• $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, $\quad |\bar{v}| = \left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

• $\hat{T} = \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$, $\quad \hat{N} = \dfrac{1}{\left|\dfrac{d\hat{T}}{dt}\right|}\dfrac{d\hat{T}}{dt} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\hat{T}}{ds}$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\bar{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|\bar{v}|^3}$$

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds}\times\hat{N} = -\frac{1}{|\bar{v}|}\frac{d\hat{B}}{dt}\times\hat{N} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\bar{v}\times\bar{a}|^2}$$

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο, με σταθερό μέτρο ταχύτητας και επιτάχυνσης. Να βρεθεί η τροχιά του.

// Αφού η κίνηση είναι επίπεδη, η τροχιά θα δίνεται ως:

$$\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \text{ με:}$$

$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j}$, μέτρου $v = |\vec{v}(t)|$
$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = C_1$, σταθερό $\in \mathbb{R}$

$\bar{\alpha}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j}$, μέτρου $\alpha = |\bar{\alpha}(t)|$
$= \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2} = C_2$, σταθερό $\in \mathbb{R}$

Άρα:
$$\begin{cases} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = C_1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{y}(t)\ddot{y}(t) = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = -\dfrac{\dot{y}(t)\ddot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \\ \ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 = C_2 \end{cases}$$

, οπότε:
$$\left(\frac{\dot{y}(t)\ddot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2 + \ddot{y}(t)^2 = C_2$$

$$\rightarrow \frac{(\dot{y}(t)\ddot{y}(t))^2}{C_1 - \dot{y}(t)^2} + \ddot{y}(t)^2 = C_2$$

$$\rightarrow C_1\ddot{y}(t)^2 + C_2\dot{y}(t)^2 = C_1C_2$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{C_1}{\sqrt{C_2}}\cos\left(d_1 + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}x\right) + d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{C_1}{C_2}\cos\left(d_1 + \frac{C_2}{C_1}x\right) + d_2 \quad \ldots$$